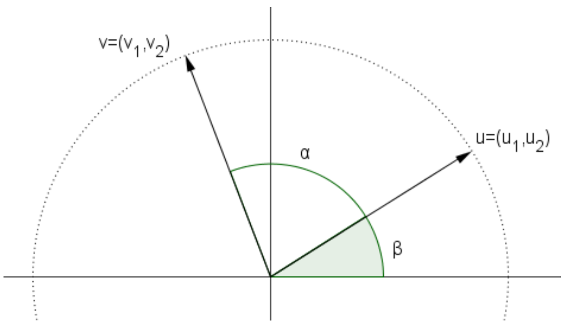
1 Rotacija

1.1 Rotacija u ravni

Neka je vektor $v=(v_1,v_2)$ nastao rotacijom u pozitivnom matematičkom smeru vektora $u=(u_1,u_2)$, različitog od nula vektora, za ugao α. Odredićemo koordinate vektora v pomoću koordinata vektora u i ugla α. Neka je ρ modul vektora u i vektora v: $\|u\|=\|v\|=\rho$.



Sa slike se vidi da je

$$v_1=\rho\cos(\beta+\alpha)=\rho(\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha),$$

$$v_2=\rho\sin(\beta+\alpha)=\rho(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta).$$

Kako je

$$\cos\beta=\frac{u_1}{\rho} \quad \text{i} \quad \sin\beta=\frac{u_2}{\rho}$$

dobijamo

$$v_1=\rho(\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha)=(\cos\alpha)u_1-(\sin\alpha)u_2,$$

$$v_2=\rho(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=(\sin\alpha)u_1+(\cos\alpha)u_2,$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Dobili smo da je $v=Pu$, gde je P matrica rotacije

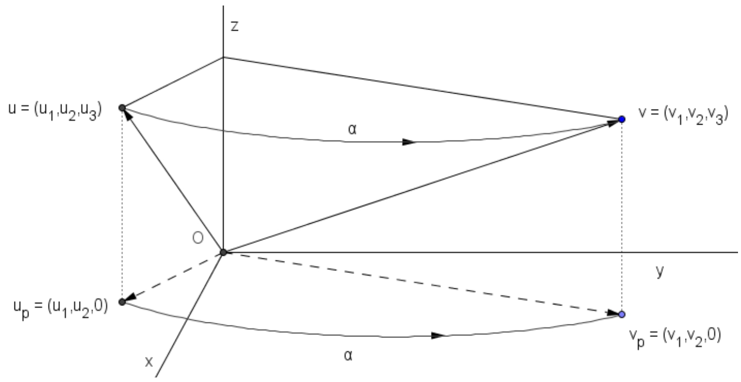
$$P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Matrica P je ortogonalna, jer je $PP^T = E$. To znači da iz $v = Pu$ sledi $u = P^T v$, pa je P^T takođe matrica rotacije, ali za rotaciju suprotnog smera od rotacije opisane matricom P. To znači da je P^T matrica rotacije za ugao $-\alpha$, što se lako vidi ako se u matrice P ugao α zameni uglom $-\alpha$.

1.2 Rotacija u prostoru

Rotacija oko jedne od osa u trodimenzionalnom prostoru je slična. Posmatraćemo rotaciju oko $z-$ose u pozitivnom smeru. Neka je vektor $v = (v_1, v_2, v_3)$ nastao rotacijom u pozitivnom matematičkom smeru vektora $u = (u_1, u_2, u_3)$, različitog od nula vektora, za ugao α. Odredićemo koordinate vektora v pomoću koordinata vektora u i ugla α. Zbog rotacije oko $z-$ose očigledno je $v_3 = u_3$. Da bismo odredili vezu između prvih i drugih koordinata vektora u i v posmatraćemo ortogonalne projekcije ovih vektora na ravan određenu $x-$osom i $y-$osom:

$$u_p = (u_1, u_2, 0) \text{ i } v_p = (v_1, v_2, 0).$$



Očigledno, problem se sada svodi na rotacuju u $xy-$ravni. Uzimajući u obzir da nam je to poznato i da je $v_3 = u_3$ dobijamo

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Sada je $v = P_z u$, gde je P_z matrica rotacije

$$P_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lako se verifikuje da je $P_z^{-1} = P_z^T$ matrica rotacije za negativan smer.

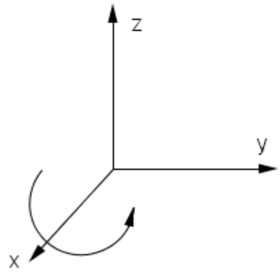
Na sličan način se izvode ortogonalne matrice za rotacije oko $x-$ose i $y-$ose.

1.2.1 Rotacije u trodimenzionalnom prostoru

Neka je vektor v nastao rotacijom u pozitivnom matematičkom smeru vektora u, različitog od nula vektora, za ugao α oko ose s. Tada je $v = P_s u$, gde je P_s odgovarajuća matrica rotacije.

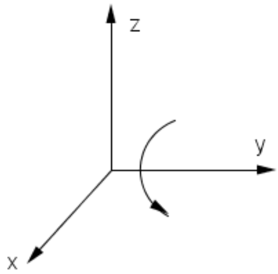
Rotacija oko $x-$ose

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



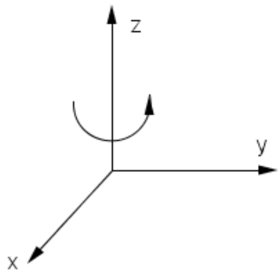
Rotacija oko $y-$ose

$$P_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



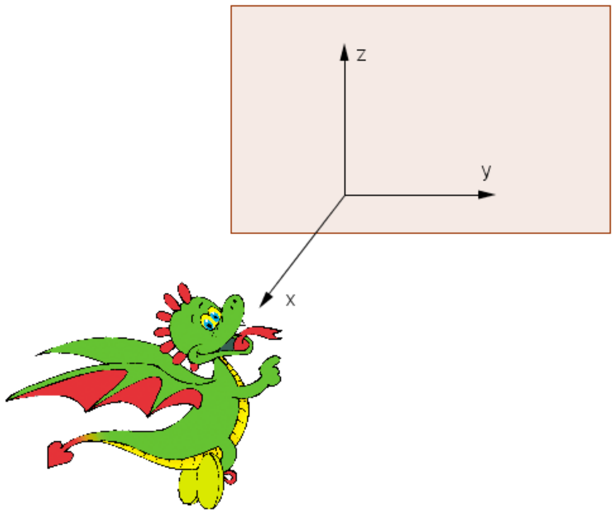
Rotacija oko $z-$ose

$$P_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



1.3 Kompjuterska grafika

Posmatraćemo kako se tačka $T(x_T, y_T, z_T)$ može predstaviti na komputerskom monitoru, odnosno u $yz-$ravni, koju posmatramo sa vrha $x-$ose. Predpostavićemo da je ekran $yz-$ravan i da je $x-$osa normalna na ovu ravan. Prvu koordinatu zadate tačke ćemo zameniti nulom, a $z-$koordinatu i $y-$koordinatu predstavićemo u $yz-$ravni.



Ako tačku T rotiramo prvo oko $z-$ose za ugao α dobićemo

$$P_z\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_T\cos\alpha - y_T\sin\alpha \\ x_T\sin\alpha + y_T\cos\alpha \\ z_T \end{pmatrix},$$

a posle rotacije tako dobijene tačke za ugao β oko $y-$ose dobijamo

$$P_y\begin{pmatrix} x_T\cos\alpha - y_T\sin\alpha \\ x_T\sin\alpha + y_T\cos\alpha \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_T\cos\alpha - y_T\sin\alpha \\ x_T\sin\alpha + y_T\cos\alpha \\ z_T \end{pmatrix}$$

$$P_y\begin{pmatrix} x_T\cos\alpha - y_T\sin\alpha \\ x_T\sin\alpha + y_T\cos\alpha \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\left(x_T\cos\alpha - y_T\sin\alpha\right) + z_T\sin\beta \\ x_T\sin\alpha + y_T\cos\alpha \\ -\sin\beta\left(x_T\cos\alpha - y_T\sin\alpha\right) + z_T\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Znači posle rotacija oko $z-$ose za ugao α a zatim rotacije oko $y-$ose za ugao β dobijamo

$$P_yP_z\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\left(x_T\cos\alpha - y_T\sin\alpha\right) + z_T\sin\beta \\ x_T\sin\alpha + y_T\cos\alpha \\ -\sin\beta\left(x_T\cos\alpha - y_T\sin\alpha\right) + z_T\cos\beta \end{pmatrix}$$

Kako nas interesuje tačka u $yz-$ravni posmatraćemo samo drugu i treću koordinatu poslednje tačke, odnosno tačku

$$\begin{pmatrix} x_T \sin\alpha + y_T \cos\alpha \\ -\sin\beta\left(x_T \cos\alpha - y_T \sin\alpha\right) + z_T \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Tački $T\left(x_T, y_T, z_T\right)$ u trodimenzionalnom prostoru odgovara tačka

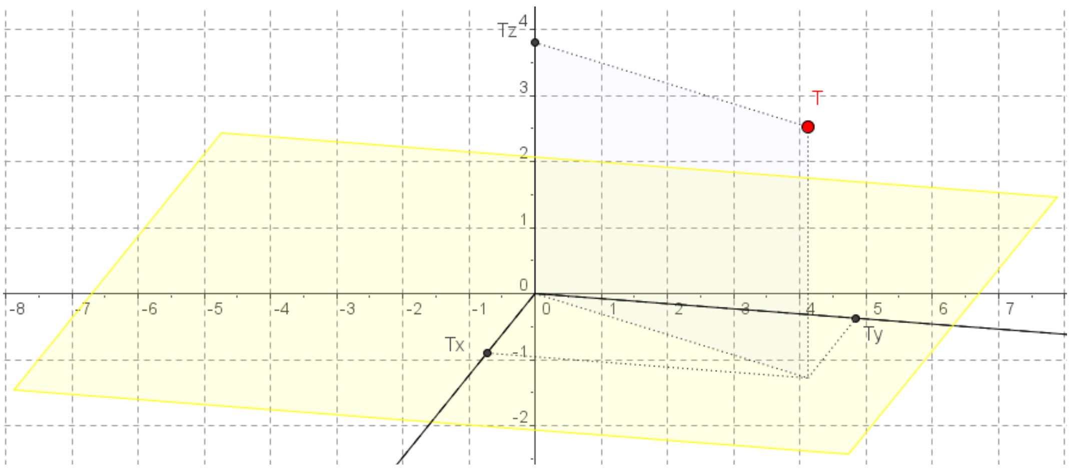
$$T_E = \left(x_T \sin\alpha + y_T \cos\alpha, \sin\beta\left(-x_T \cos\alpha + y_T \sin\alpha\right) + z_T \cos\beta\right)$$

na ekranu.

Primer. Tačka $T = (3,5,4)$ posle rotacije za $\alpha = 346^\circ$ oko $z-$ose i posle toga za $\beta = 18^\circ$ oko $y-$ose na ekranu se predstavlja ka tačka $T_E = (4.126,\ 2.531)$.

Tačke $(3,0,0)$, $(0,5,0)$, $(0,0,4)$ preslikavaju se redom u tačke

$T_x = (\text{-}0.726,\ \text{-}0.9)$, $T_y = (4.851,\ \text{-}0.374)$, $T_z = (0,\ 3.804)$.



1.4 Literatura

1 Meyer, C. D., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 2000.